Théorie des substitutions et géométrie : conjectures et confirmations autour des 27 droites d'une surface cubique

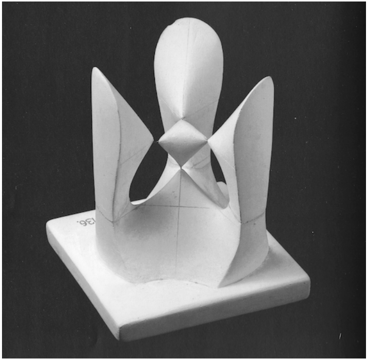
François Lê

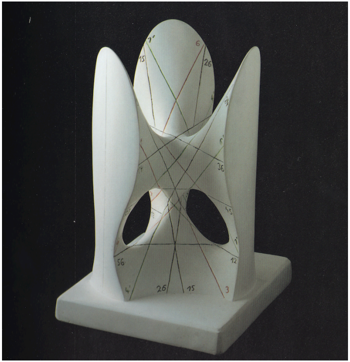
Institut de Mathématiques de Jussieu–PRG
Université Pierre et Marie Curie (Paris 6)

22 mai 2014

27 droites

Cayley & Salmon, 1849 : toute surface cubique contient exactement 27 droites.





(Extraits de *Mathematische Modelle*, G. Fischer, 1986)

Un sujet ramifié

D'après le livre *Twenty-seven Lines upon the Cubic Surface* (A. Henderson, 1911), le sujet a engendré différents développements :

- question de la notation des droites ;
- démonstrations alternatives par la géométrie synthétique ;
- réalisation de modèles concrets de surfaces cubiques ;
- liens avec la théorie des fonctions hyperelliptiques ;
- liens avec les 28 tangentes doubles d'une courbe quartique ;
- traitement du problème par la théorie des groupes.

→ Comprendre l'organisation du savoir, ses réorganisations, ses dynamiques.

Un sujet ramifié

D'après le livre *Twenty-seven Lines upon the Cubic Surface* (A. Henderson, 1911), le sujet a engendré différents développements :

- question de la notation des droites ;
- démonstrations alternatives par la géométrie synthétique ;
- réalisation de modèles concrets de surfaces cubiques ;
- liens avec la théorie des fonctions hyperelliptiques ;
- liens avec les 28 tangentes doubles d'une courbe quartique ;
- traitement du problème par la théorie des groupes.

→ Comprendre l'organisation du savoir, ses réorganisations, ses dynamiques.

Un sujet ramifié

D'après le livre *Twenty-seven Lines upon the Cubic Surface* (A. Henderson, 1911), le sujet a engendré différents développements :

- question de la notation des droites ;
- démonstrations alternatives par la géométrie synthétique ;
- réalisation de modèles concrets de surfaces cubiques ;
- liens avec la théorie des fonctions hyperelliptiques ;
- liens avec les 28 tangentes doubles d'une courbe quartique ;
- traitement du problème par la théorie des groupes.

→ Comprendre l'organisation du savoir, ses réorganisations, ses dynamiques.

Un sujet ramifié

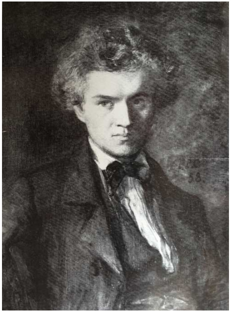
D'après le livre *Twenty-seven Lines upon the Cubic Surface* (A. Henderson, 1911), le sujet a engendré différents développements :

- question de la notation des droites ;
- démonstrations alternatives par la géométrie synthétique ;
- réalisation de modèles concrets de surfaces cubiques ;
- liens avec la théorie des fonctions hyperelliptiques ;
- liens avec les 28 tangentes doubles d'une courbe quartique ;
- traitement du problème par la théorie des groupes.

$\rightarrow$ Comprendre l'organisation du savoir, ses réorganisations, ses dynamiques.

Le *Traité des substitutions*

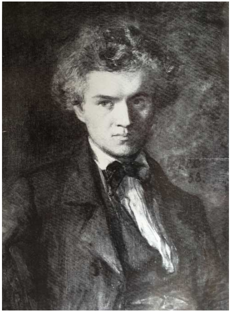
Camille Jordan, 1870, *Traité des substitutions et des équations algébriques*, chapitre “Applications géométriques”.



- Équation de M. Hesse
- Équations de M. Clebsch
- Droites situées sur les surfaces du quatrième degré à conique double
- Points singuliers de la surface de M. Kummer
- Droites situées sur les surfaces du troisième degré
- Problèmes de contact

Le *Traité des substitutions*

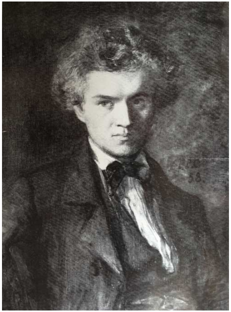
Camille Jordan, 1870, *Traité des substitutions et des équations algébriques*, chapitre "Applications géométriques".



- Équation de M. Hesse
- Équations de M. Clebsch
- Droites situées sur les surfaces du quatrième degré à conique double
- Points singuliers de la surface de M. Kummer
- Droites situées sur les surfaces du troisième degré
- Problèmes de contact

Le *Traité des substitutions*

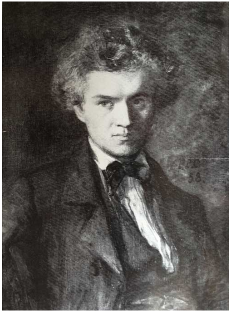
Camille Jordan, 1870, *Traité des substitutions et des équations algébriques*, chapitre “Applications géométriques”.



- Équation de M. Hesse
- Équations de M. Clebsch
- Droites situées sur les surfaces du quatrième degré à conique double
- Points singuliers de la surface de M. Kummer
- Droites situées sur les surfaces du troisième degré
- Problèmes de contact

Le *Traité des substitutions*

Camille Jordan, 1870, *Traité des substitutions et des équations algébriques*, chapitre "Applications géométriques".



- Équation de M. Hesse
- Équations de M. Clebsch
- Droites situées sur les surfaces du quatrième degré à conique double
- Points singuliers de la surface de M. Kummer
- Droites situées sur les surfaces du troisième degré
- Problèmes de contact

Jordan : *modus operandi*

"Les problèmes géométriques fournissent un grand nombre d'équations remarquables, dont les diverses solutions sont généralement liées entre elles par des relations géométriques très-intéressantes. Ces relations permettent de construire, dans chaque cas particulier, une fonction des racines, dont la forme algébrique reste inaltérée par toute substitution du groupe de l'équation proposée. Cette remarque sert à déterminer ce groupe, dont la connaissance permet réciproquement de rechercher les propriétés plus cachées que présente l'équation, notamment celles qui concernent sa résolution."

[Jordan, *Sur les équations de la géométrie*, 1869]

Équation des 27 droites

Une droite $\begin{cases} x = \alpha z + \beta \\ y = \gamma z + \delta \end{cases}$ est incluse dans la surface $F(x, y, z) = 0$ ssi $F(\alpha z + \beta, \gamma z + \delta, z) = 0$ pour tout z. On écrit

$$F(\alpha z + \beta, \gamma z + \delta, z) = f_3(\alpha, \beta, \gamma, \delta) z^3 + f_2(\alpha, \beta, \gamma, \delta) z^2 + f_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta) z + f_0(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$$

Alors la droite est incluse dans la surface ssi

$$\begin{cases} f_3(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0 \\ f_2(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0 \\ f_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0 \\ f_0(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0. \end{cases}$$

Éliminer 3 variables parmi les 4 donne l'*équation X_{27} aux 27 droites* (degré 27).

Jordan : *modus operandi*

"Les problèmes géométriques fournissent un grand nombre d'équations remarquables, dont les diverses solutions sont généralement liées entre elles par des relations géométriques très-intéressantes. Ces relations permettent de construire, dans chaque cas particulier, une fonction des racines, dont la forme algébrique reste inaltérée par toute substitution du groupe de l'équation proposée. Cette remarque sert à déterminer ce groupe, dont la connaissance permet réciproquement de rechercher les propriétés plus cachées que présente l'équation, notamment celles qui concernent sa résolution."

[Jordan, *Sur les équations de la géométrie*, 1869]

28-27 : Jordan

Notation des 27 droites : $a, b, c, d, \ldots, m, \ldots, u, m', \ldots, u'$.

Chaque droite en coupe 10 autres. Ces 10 se coupent 2 par 2.
Il y a donc 45 triangles formés avec les 27 droites. [Steiner]

Exemple : a coupe $b, c, d, e, f, g, h, i, k, l$.
Les triangles contenant a sont abc, ade, afg, ahi, akl.
Les triangles contenant b sont abc, bmn, bpq, brs, btu.

La fonction des racines est

$$\varphi_{27} = abc + ade + \ldots + lps',$$

et on a "donc" $\mathrm{groupe}(X_{27}) = \mathrm{groupe}(\varphi_{27})$.

28-27 : Jordan

Notation des 28 tangentes doubles : $(x_1y_1x_2y_2x_3y_3)$ avec $x_i, y_i \in \{0,1\}$ et $\sum x_iy_i \equiv 0 \mod 2$.

Les 8 points de contact des 4 tangentes $(x_1 \dots y_3), \dots, (x_1''' \dots y_3''')$ sont sur une même conique si :

$$x_i + x_i' + x_i'' + x_i''' \equiv y_i + y_i' + y_i'' + y_i''' \equiv 0 \mod 2$$

pour tout $i \in \{1,2,3\}$ [Clebsch].

La fonction des racines est

$$\varphi_{28} = \sum_{\substack{x_i+x_i'+x_i''+x_i'''\equiv 0 \\ y_i+y_i'+y_i''+y_i'''\equiv 0 \\ \forall i\in\{1,2,3\}}} (x_1y_1\dots y_3)\dots(x_1'''y_1'''\dots y_3'''),$$

et on a “donc” $\mathrm{groupe}(X_{28}) = \mathrm{groupe}(\varphi_{28})$.

28-27 : Jordan

Après adjonction de (110000), les racines restantes de X_{28} dépendent d'une équation de degré 27, dont le groupe H laisse invariants les termes de φ_{28} contenant (110000).

Ainsi, H laisse invariante une fonction ψ :

$$\varphi_{28} = (110000)\{\underbrace{(000011)(000111)(110100) + \dots}_{\psi}\} + \dots$$

Mais ψ et φ_{27} sont identiques à notation près, donc $\mathrm{groupe}(\psi) = \mathrm{groupe}(\varphi_{27})$ et donc $H = \mathrm{groupe}(X_{27})$.

28-27-16

Jordan montre ainsi que l'équation aux 27 droites est liée à celle aux 28 tangentes doubles... et à celle aux 16 droites des surfaces quartiques à conique double :

- Après adjonction d'une de ses racines, X_{28} donne une équation de degré 27 ayant même groupe que X_{27}.
- Après adjonction d'une de ses racines, X_{27} donne une équation de degré 26 qui se scinde en deux facteurs de degrés 10 et 16 qui ont même groupe que l'équation aux 16 droites X_{16}.

28-27-16

Jordan montre ainsi que l'équation aux 27 droites est liée à celle aux 28 tangentes doubles... et à celle aux 16 droites des surfaces quartiques à conique double :

- Après adjonction d'une de ses racines, X_{28} donne une équation de degré 27 ayant même groupe que X_{27}.
- Après adjonction d'une de ses racines, X_{27} donne une équation de degré 26 qui se scinde en deux facteurs de degrés 10 et 16 qui ont même groupe que l'équation aux 16 droites X_{16}.

Commentaires de Jordan

“Ainsi se retrouve entre le problème des 27 droites et celui des doubles tangentes, le lien remarquable signalé par M. Geiser.” [Jordan, 1870]

“La théorie des substitutions aurait donc permis de prévoir l’existence des liens géométriques existant entre les problèmes des 28 tangentes doubles, des 27 droites et des 16 droites.” [Jordan, 1869]

[L’équation aux 27 droites] est intimement liée à l’équation aux 16 droites. Ce résultat, que la théorie m’avait fait prévoir, a été vérifié par M. Geiser. [Jordan, 1881]

Carl Friedrich Geiser

- Carl Friedrich Geiser, 1843-1934, suisse.
- Petit neveu de Jacob Steiner.
- Géométries algébrique et différentielle, théorie des invariants...
- Directeur de l'ETH.
- "Le géomètre le plus influent de Suisse."
- 1868-1869 : articles sur surfaces cubiques (27-28 et 27-16).

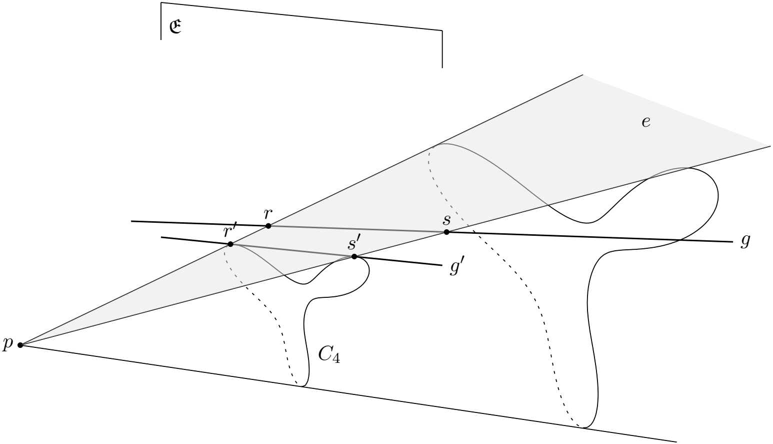
28-27 : Geiser

Sei F_3 eine Fläche dritten Grades ohne Singularitäten, p ein willkürlich im Raum angenommener Punkt, so ist der von p aus der F_3 umschriebene Tangentenkegel vom sechsten Grade. Liegt p auf F_3 selbst, so besteht der Tangentenkegel aus der doppelt gelegten Tangentialebene E der F_3 in p und aus einem Kegel vierten Grades K_4. Sei g eine der 27 Geraden der F_3, so schneidet die durch p und g gelegte Ebene e, welche eine Doppeltangentialebene von K_4 ist, aus F_3 neben g noch einen Kegelschnitt aus, der mit g zwei Punkte (r, s) gemein hat. Werden diese Punkte durch gerade Linien mit p verbunden, so erhält man die beiden Berührungskanten von K_4 mit e. Ausser den 27 Ebenen e ist auch noch E eine Doppeltangentialebene von K_4; ihre beiden Berührungskanten sind die Haupttangenten t_1 und t_2 der F_3 in p.

Die Tangentenkegel, welche von p aus allen diesen Flächen dritten Grades umschrieben sind, bilden ein Büschel von Kegeln mit 16 Grundkanten, welches dem Büschel der Flächen projectivisch ist, und zwar treffen sie die Ebene $\mathfrak{E}$ in einem Curvenbüschel vierten Grades mit 16 Grundpunkten (es sind diess, wie man sich leicht überzeugt, die Punkte t, τ, b, β), welches auch die gegebene Curve C_4 enthält. Dieser Curve C_4 entspricht also nach bekannten Gesetzen wirklich eine Fläche F_3 des vorhin definirten Flächenbüschels, d. h. es kann stets eine Fläche dritten Grades gefunden werden, welche allen gestellten Bedingungen Genüge leistet. Also:

Eine beliebige Curve vierten Grades in der Ebene kann stets aufgefasst werden als der Durchschnitt des Tangentenkegels, welcher von einem Punkte einer Fläche dritten Grades aus an diese Fläche geht, mit der Ebene der Curve.

28-27 : Geiser



Commentaires de Geiser

"Les relations entre les droites d'une surface cubique et les tangentes doubles d'une courbe quartique ont amené M. Jordan à des recherches algébriques qui suggèrent un lien entre les droites d'une surface cubique générale et les droites d'une surface quartique à conique double. En effet, les considérations géométriques suivantes confirment la conjecture [Vermuthung] annoncée par M. Jordan."

[Geiser, *Ueber die Flächen vierten Grades, welche eine Doppelcurve zweiten Grades haben*, 1869]

27-16 : Geiser

- Geiser construit une correspondance entre surfaces cubiques et surfaces quartiques à conique double *(éclatements du plan projectif en 6, resp. 5 points)*.
- Étant donnée une des 27 droites, les 16 qui ne la rencontrent pas correspondent aux 16 droites des quartiques.
- Les relations d'incidence entre les 16 droites sont identiques.

Jordan vs. Geiser

Pas de transfert effectif entre les maths de Jordan et de Geiser :

- Substitutions de racines = transformations des droites ?
- Adjonction d'une racine = distinction d'une droite ?
- Factorisation d'une équation = groupements de droites ?
- Identité des relations d'incidence = égalités des groupes ?

Pas non plus de transfert heuristique précis.

→ Hiatus entre théorie des substitutions et géométrie.

→ En route vers le *Programme d'Erlangen* de Felix Klein, 1872.

Jordan vs. Geiser

Pas de transfert effectif entre les maths de Jordan et de Geiser :

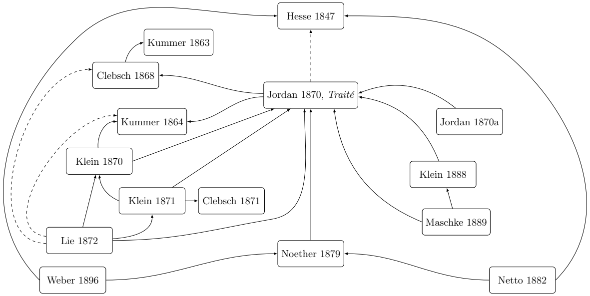
- Substitutions de racines = transformations des droites ?
- Adjonction d'une racine = distinction d'une droite ?
- Factorisation d'une équation = groupements de droites ?
- Identité des relations d'incidence = égalités des groupes ?

Pas non plus de transfert heuristique précis.

$\rightarrow$ Hiatus entre théorie des substitutions et géométrie.

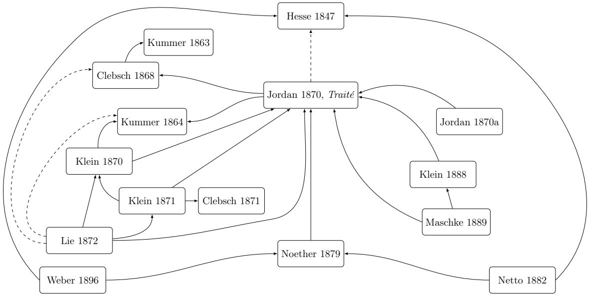
$\rightarrow$ En route vers le *Programme d'Erlangen* de Felix Klein, 1872.

Les équations de la géométrie



Les équations de la géométrie s'organisent comme un *système de type culturel*, au sens d'"un ensemble lié de manières de penser, de sentir et d'agir plus ou moins formalisées [...] apprises et partagées par une pluralité de personnes". [Rocher, *Introduction à la sociologie générale*, 1992]

Les équations de la géométrie



Les équations de la géométrie s'organisent comme un *système de type culturel*, au sens d'"un ensemble lié de manières de penser, de sentir et d'agir plus ou moins formalisées [...] apprises et partagées par une pluralité de personnes". [Rocher, *Introduction à la sociologie générale*, 1992]

Culture & culture(s)

Comment comprendre la trajectoire historique d'un fait (d'un théorème, d'une théorie, d'un objet, d'une personne) mathématique ?

Comment un tel fait est-il incorporé au savoir mathématique ? Réorganise-t-il le savoir et les façons de faire mathématiques ?

Ma (possible) thèse :

- digestion(s) en des cultures individuelles par idiosyncrasies locales ;
- créations de systèmes culturels par rencontre de ces cultures ;
- dissolutions de ces systèmes dans la Culture mathématique en y laissant des traces de survivance.